TD1

SUITES.

Exercice 1.- *ECRICOME 2005 (extrait).*
On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$

ainsi que les fonctions φ et g définies par :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$
- $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x\,; y) = xe^y - ye^x.$

On donne le tableau de valeurs de f :

$x =$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x) \simeq$	$-0,4$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

I. Étude de deux suites associées à f.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J que l'on précisera.
5. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
6. **a.** Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.
   b. Donner la valeur de x_0.
   c. Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2.
   d. Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.
7. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$
   a. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b. On donne $\varphi(\frac{3}{2}) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\dfrac{3}{2}; 2\right]\right) \subset \left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$.
   c. En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right], \quad |\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

d. Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.

e. Montrer successivement que pour tout entier n :

$$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2 \quad ; \quad |u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1| \quad ; \quad |u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n .$$

f. En déduire la limite de la suite (u_n).

II. Recherche d'extremum éventuel de g (Cubes).

1. Calculer les dérivées partielles premières de la fonction g.

2. Montrer que si g admet un extremum local en $(a;b)$ de $\mathbb{R}^2$, alors : $\begin{cases} ab = 1 \\ a = e^{a-\frac{1}{a}} \end{cases}$

En déduire que nécessairement $\begin{cases} a > 0 \\ ab = 1 \\ f(a) = 0 \end{cases}$ puis que le seul point où g peut admettre un extremum est le couple $(1;1)$.

3. Calculer les dérivées partielles secondes de la fonction g.

4. La fonction g admet-elle un extremum local sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2.- *ECRICOME 2001 (extrait).*
On désigne par n un entier naturel non nul et a un réel strictement positif.
On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n) \ : \ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+2n} = a$$

À cet effet, on introduit la fonction f_n, de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+2n} - a$$

I. Étude d'un cas particulier. Pour cette question seulement, on prend $a = \dfrac{11}{6}$ et $n = 1$.

1. Représenter la fonction f_1 relativement à un repère orthonormal du plan. (unité graphique 2 cm)

2. Calculer $f_1(1)$, puis déterminer les racines de (E_1).
(On donne $\sqrt{37} = 6{,}08$ à 10^{-2} près par défaut)

II. Dénombrement des racines de (E_n).

1. Dresser le tableau de variations de f_n.

2. Justifier l'existence de racines de l'équation (E_n) et en déterminer le nombre.

III. Équivalent de la plus grande des racines quand n tend vers $+\infty$. On note x_n la plus grande des racines de (E_n).

1. Justifier que $x_n > 0$.

2. Démontrer que pour tout réel $x > 1$:

$$\frac{1}{x} < \ln \frac{x}{x-1} < \frac{1}{x-1}$$

En déduire que pour x réel strictement positif :

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + a < \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right) < f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a$$

puis, que :

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}$$

3. Montrer que pour tout n entier naturel, non nul :

$$x_n > \frac{2n}{e^a - 1}$$

4. Quelle est la limite de x_n, puis la limite de $\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right)$, lorsque n tend vers $+\infty$?

5. Prouver enfin l'existence d'un réel δ, que l'on exprimera en fonction de a, tel que l'on ait, au voisinage de l'infini, l'équivalent suivant

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \delta.n$$